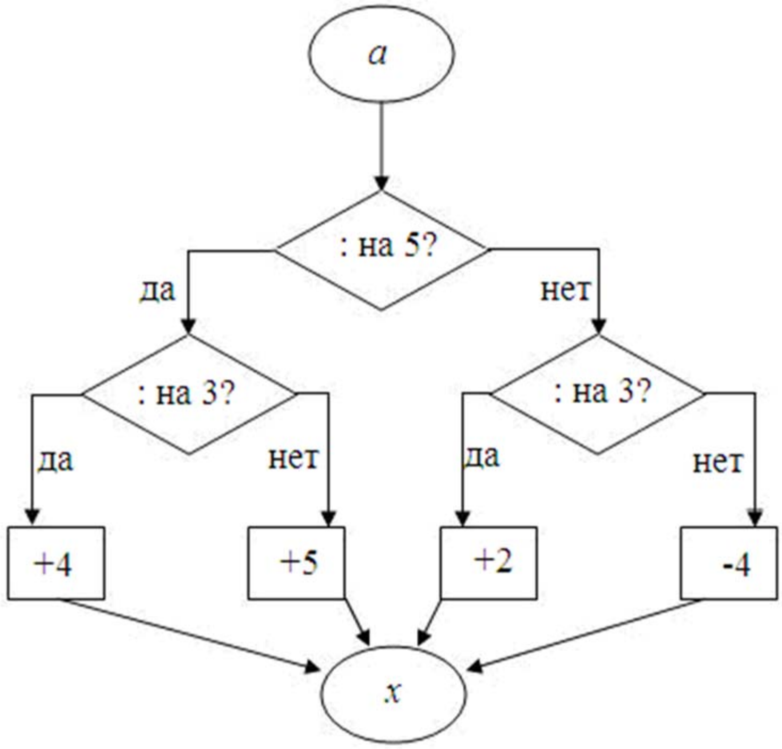
ММ 1 этап 5-6 класс *Удивительные числа и делимость*

ЗАДАНИЯ И РЕШЕНИЯ

Задача 1. В первом столбце таблицы даны числа. С каждым числом нужно проделать операции согласно блок-схеме и результат записать в соседней ячейке. Каждому числу второго столбца соответствует буква. После того, как вы заполните второй столбец, расположите полученные числа в порядке убывания (буквы при этом тоже поменяются местами). Должно получиться слово, которое следует указать в ответе.



a	*x*	
320		д
326		а
328		и
324		а
325		р
315		н

Ответ запишите в виде слова

Ответ. Радиан.

Решение.

320 делится на 5 и не делится на 3, прибавляем к числу 5 (325).
326 не делится на 5 и не делится на 3, отнимаем от числа 4 (322).
328 не делится на 5 и не делится на 3, отнимаем от числа 4 (324).
324 не делится на 5 и делится на 3, прибавляем к числу 2 (326).
325 делится на 5 и не делится на 3, прибавляем к числу 5 (330).
315 делится на 5 и делится на 3, прибавляем к числу 4 (319).

Запишем числа в порядке убывания: 330, 326, 325, 324, 322, 319, этим числам соответствуют буквы, составляющие слово ***радиан***.

a	*x*	
320	*325*	д
326	*322*	а
328	*324*	и
324	*326*	а
325	*330*	р
315	*319*	н

Задача 2. Какую цифру нужно приписать к числу 2018 слева и справа для того, чтобы получилось шестизначное число, кратное 9. В ответе напишите результат деления полученного числа на 9.

Ответ запишите в виде числа

Ответ. 91132.

Решение. Сумма цифр исходного числа равна 11, сумма двух одинаковых цифр, приписанных слева и справа – четная. Сума цифр в новом числа будут нечетная и кратна 9 –это 27 (следующее число 45 уже слишком велико). $\frac{27-11}{2}=8$. Итак, к числу 2018 нужно слева и справа приписать по 8 – 820188. Результат деления 820188 на 9 равен 91132.

Задача 3. На одном из занятий математического кружка число отсутствующих учеников составило $\frac{1}{6}$ часть от числа присутствующих. После того, как из класса вышел один ученик, число отсутствующих стало равно $\frac{1}{5}$ числа присутствующих. Сколько всего учеников в математическом кружке?

Ответ запишите в виде числа

Ответ. 42.

Решение. **I способ.** Так как количество отсутствующих составляет $\frac{1}{6}$ часть от числа присутствующих, значит, количество присутствующих делится на 6, а общее число учеников математического кружка делится на 7. Аналогично анализируя информацию после выхода одного ученика, можно сделать вывод, что общее число учеников делится на 6. Тогда общее число учеников делится на 42.

Если в кружке всего 42 ученика, то на занятии присутствовало 36 учеников и 6 человек отсутствовало. После выхода одного ученика присутствующих стало 35, а отсутствующих 7, что соответствует тому, что отсутствующие составили $\frac{1}{5}$ числа присутствующих.

Рассуждая в общем виде, можно доказать, что ответ единственный. Пусть всего в кружке $42n$ человек. Тогда присутствует $36n$ человек, а отсутствует $6n$ человек. После выхода одного ученика присутствующих будет $36n-1$ человек, а отсутствующих $6n+1$ человек, при этом присутствующих окажется в 5 раз больше отсутствующих, т.е.

$36n-1=5(6n+1) \quad \Rightarrow \quad n=1.$

II способ. Так как количество отсутствующих составляет $\frac{1}{6}$ часть от числа присутствующих, значит, количество отсутствующих сначала составило $\frac{1}{7}$ часть от общего числа учеников в кружке. А когда к отсутствующим добавится еще один человек, то отсутствующие составят $\frac{1}{6}$ часть от общего числа учащихся. Значит, один человек составляет $\frac{1}{6}-\frac{1}{7}=\frac{1}{42}$ часть всех учеников кружка. Значит, всего учащихся в кружке 42 человека.

Задача 4. С помощью признаков делимости на 2, 5, 10, 3 и 9 можно формулировать признаки делимости на другие числа, полученные произведением указанных чисел (главное, чтобы числа-множители не имели общих делителей, отличных от единицы). Например, число делится на 15, если обладает признаками делимости на 3 и на 5 (подумайте: почему?). Запишите ***наименьшее положительное число***, которое записано только с помощью двух цифр 0 и 1 и делится на 15.

Ответ запишите в виде числа

Ответ: 1110.

Решение. Так как $15=3 \cdot 5$, оно обладает признаками делимости на эти числа, т.е. последняя цифра 0 или 5 (в нашем случае 0), а сумма цифр делится на 3, поэтому нужно добавить впереди три единицы. Получаем число 1110. Минимально возможный набор цифр гарантирует, что это наименьшее положительное число.

Задача 5. В начале учебного года Знайка предложил жителям Цветочного города перемножить **любые пять последовательных натуральных чисел,** первые семь полученных результатов были записаны на доске:

1) 351122, 2) 11700, 3) 7558, 4) 55440, 5) 72645, 6) 2520, 7) 5880.

Когда Знайка увидел эти результаты, он воскликнул: «Друзья, да вы за лето разучились считать!».

- «Как ты можешь так говорить, ведь ты даже не знаешь, какие числа мы взяли», - обиделся Незнайка.

- «Для большинства примеров мне и это не нужно, я просто знаю признаки делимости, - ответил ему Знайка, - но для нескольких примеров я сделал разложение на простые множители».

Попробуйте и вы определить *неверные* результаты среди этих чисел:

В ответе укажите ***номера неверных результатов*** в порядке возрастания без пробелов и каких-либо знаков препинания.

Ответ запишите в виде одного числа

Ответ. 12357.

Решение. Среди пяти последовательных натуральных чисел точно есть два последовательных четных числа, одно из которых будет делиться на 4; значит, произведение точно делится на 8 (признак делимости: три последние цифры числа образуют число, делящееся на 8), Среди пяти последовательных натуральных чисел точно есть число, которое делится на 3 и на 5. Тогда результат должен делиться и на 3 (признак делимости: сумма цифр числа должна делиться на 3), и на 5 (признак делимости: последняя цифра в записи числа 5 или 0, в нашем случае только 0, так как число должно быть четным).

Так как результат четный и делится на 5, то 351122, 7558, 72645 – неверные результаты.

Число 11700 не делится на 8 ($700 = 400 + 240 + 56 + 4$ – не делится на 8). Значит 11700 также неверный результат.

Оставшиеся три числа 55440, 2520, 5880 делятся на 3, 5 и 8.

Проверим, разложив их на простые множители, могут ли они быть результатом произведения пяти последовательных натуральных чисел.

$55440 = 5544 \cdot 10 = 11 \cdot 504 \cdot 2 \cdot 5 = 11 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 56 \cdot 2 \cdot 5 = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11$ – верный результат.

$2520 = 252 \cdot 10 = 2 \cdot 126 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 63 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$ – верный результат.
$5880 = 588 \cdot 10 = 2 \cdot 294 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 147 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 49 \cdot 2 \cdot 5$. Так как $49 = 7 \cdot 7$, то либо в произведении есть два множителя, кратных 7 (этого не может быть среди пяти последовательных натуральных чисел), либо один из множителей кратен 49. Даже если взять наименьшее из таких чисел 49 и самые маленькие соседние натуральные числа 48. 47, 46 и 45, то результат их произведения будет явно больше числа 5880. Значит, это неверные результат.

Итак, среди указанных семи чисел только два верных результата (55440 и 2520), значит, пять результатов неверных, их номера: 12357.

Задача 6. Найдите ***наименьшее трехзначное*** натуральное число, которое при делении на 7 дает в остатке 6, а при делении на 6 остаток равен 5.

Ответ запишите в виде числа

Ответ. 125.

Решение. <u>I способ.</u> Если к числу добавить единицу, то оно будет нацело делиться и на 7, и на 6, т.е. оно будет кратно числу 42.
$42 \cdot 2 = 84$ – двузначное число;
$42 \cdot 3 = 126$ – наименьшее трехзначное число, кратное 42. Значит, искомое число 125.
<u>II способ.</u> Выпишем все числа, имеющие при делении на 7 остаток 6 и все числа, имеющие при делении на 6 остаток 5:
6, 13, 20, 27, 34, **41**, 48, 55, 62, 69, 76, **83**, 90, 97, 104, 111, 118, **125**, ….
5, 11, 17, 23, 29, 35, **41**, 47, 53, 59, 65, 71, 77, **83**, 89, 95, 101, 107, 113, 119, **125**, …
Видим, что наименьшее трехзначное число, которое обладает двумя указанными свойствами, – 125.

Задача 7. Рассмотрите числа, данные в таблице. Каждое из них замените на число, равное сумме его цифр. Например, число 3426 заменим на 15 (3+4+2+6). В результате такой замены число уменьшается. Заполните таблицу. В ответе укажите число случаев, когда результат (четвертая строка) получился кратным 9?

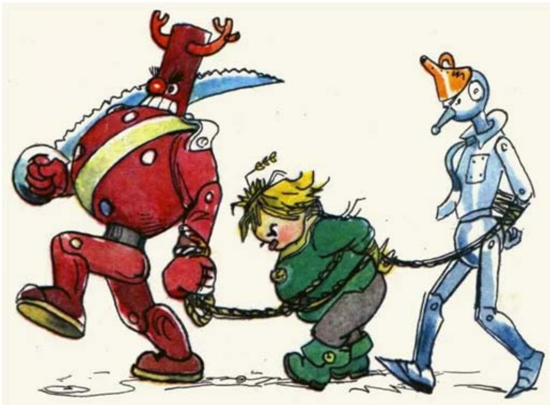
число	2134	2534	635	94	2065	333	77	100	99	121
сумма цифр числа										
разность исходного числа и суммы его цифр										
делимость на 9 полученной разности										

Ответ запишите в виде числа
Ответ. 10.
Решение:
2134 – (2+1+3+4)=2134-10=2124 – делится на 9
2534 – (2+5+3+4)=2534-14=2520 – делится на 9
635 – (6+3+5)=635-14=621 – делится на 9
94 – (9+4)=94-13=81 – делится на 9

2065 – (2+0+6+5)=2065-13=2052 – делится на 9
333 – (3+3+3)=333-9=324 – делится на 9
77 – (7+7)=77-14=63 – делится на 9
100 – (1+0+0)=100-1=99 – делится на 9
99 – (9+9)=99-18=81 – делится на 9
121 – (1+2+1)=121-4=117 – делится на 9

Вывод: если из числа вычесть сумму его цифр, то полученный результат делится на 9.

Задача 8. Урфин Джюс заточил Страшилу и Железного Дровосека в темницу.



«Если ты такой уж мудрый, - издеваясь сказал Урфин Джюс Страшиле, - то я дам тебе подсказку: умножь все числа от 1 до 50 и ты получишь большое число, сложи в нем все цифры, получишь новое число, в новом числе опять сложи все цифры и так до тех пор, пока не получишь однозначное число. Нажми кнопку с этой цифрой на замке, и вы с другом выйдете на волю. Но если ты ошибешься и нажмешь не ту кнопку, в темнице загорится огонь, и вы погибните».

В темнице было очень темно и на стенах нечем было писать. Но Страшила был очень умным, он, конечно, не стал перемножать все числа от 1 до 50, но сумел догадаться, какое число получится в итоге и спас себя и Дровосека! Укажите и вы это число.

Ответ запишите в виде числа

Ответ: 9.

Решение. Произведение натуральных чисел от 1 до 50 содержит множитель 9, значит, результат делится на 9. Тогда сумма цифр этого числа так же делится на 9. Затем нужно опять посчитать сумму цифр нового числа, делящегося на 9 и т.д. Полученную операцию выполняем несколько раз, всегда получая число, кратное 9. В результате получим однозначное число кратное 9 – это 0 или 9. Но 0 не может получиться в результате сложения цифр ненулевого числа, поэтому останется число 9.

Задача 9. Числа называются ***палиндромами***, если их десятичную запись можно одинаково прочитать, как справа налево, так и наоборот (слева направо). Например, числа 131, 2552 оба являются числами-палиндромами. Сколько существует натуральных чисел-палиндромов, не превосходящих 1001?

Ответ запишите в виде числа.

Ответ. 109.

Решение. Несложно заметить, что все однозначные числа от 1 до 9 являются палиндромами. Таких чисел 9. Двузначные числа-палиндромы обязательно должны иметь одинаковые цифры: 11, 22, …, 99. Их тоже всего 9 штук. Трехзначные числа-палиндромы должны иметь вид $\overline{aba}$, причем a может принимать значения от 1 до 9, а b

– от 0 до 9 и при этом a может равняться b. Значит, трехзначных чисел-палиндромов всего 90. Четырехзначных чисел, не превосходящих 1001 два: 1000 и 1001, при этом 1001 - палидром. Таким образом, натуральных чисел, не превосходящих 1001 и являющихся палиндромами, всего 9 + 9 + 90 + 1 = 109.

Задача 10. Сколько существует натуральных пятизначных чисел-палиндромов, кратных 15 (делящихся на 15 без остатка)?

Ответ запишите в виде числа.

Ответ. 33.

Решение. Чтобы число делилось на 15, необходимо, чтобы оно делилось и на 5, и на 3. Если число делится на 5, то его запись должна заканчиваться цифрой 0 или 5. Так как ищем числа-палиндромы, то первая цифра должна совпадать с последней. Запись натуральных чисел не начинается с нуля, значит, искомые числа должны иметь вид: $\overline{5aba5}$, причем сумма цифр должна делиться на 3, и цифры могут быть как одинаковыми, так и различными. Таким образом, значение выражения $10 + 2a + b$ должно делиться на 3.

Организуем перебор по значениям a, проверяя делимость на 3, подберем соответствующие значения b.

Значение a	***Возможные значения b*** (значение выражения $10 + 2a + b$ должно делиться на 3)	***Количество вариантов***
0	2, 5 или 8	3
1	0, 3, 6 или 9	4
2	1, 4 или 7	3
3	2, 5 или 8	3
4	0, 3, 6 или 9	4
5	1, 4 или 7	3
6	2, 5 или 8	3
7	0, 3, 6 или 9	4
8	1, 4 или 7	3
9	2, 5 или 8	3
	ИТОГО:	33